Enunciado del problema

Problema

Una partícula de 4 kg se mueve a lo largo del eje x bajo la acción de la fuerza

.

$$\mathbf{F} = -(\pi^2/16)\,\mathbf{x}$$

Cuando t = 2 s, la partícula pasa por el origen, y cuando t = 4 s su velocidad es de 4 m/s. (a) Halle la ecuación para el desplazamiento. (b) Muestre que la amplitud del movimiento es de $\frac{32\sqrt{2}}{\pi}$ medida en metros.

Parte complementaria del problema

a) Graficar en un mismo gráfico (aunque las unidades del eje vertical no sean las mismas), la posición, la velocidad y la aceleración de la partícula que describe el movimiento oscilatorio armónico simple.

A partir del gráfico anterior, responder:

i) ¿Qué ocurre con la velocidad de la partícula en los instantes de tiempo en el que la posición vale cero? ¿Qué ocurre en esos mismos instantes con la aceleración?

ii) ¿Qué ocurre con la velocidad de la partícula en los entornos de los instantes en los que la posición es máxima? ¿Qué significa que en los mismos instantes en los que la posición es máxima, la aceleración sea mínima?

iii) ídem a la anterior para los instantes en los que posición es mínima.

b) Analizar la validez de la le Ley de Hooke $\vec{F} = -k\,x\,\hat{x}$ en todo el rango $-A \leq x \leq A$.

Pensar primero $-A \leq x \leq 0$ y luego $0 < x \leq A$ *¿Qué significa que x sea la coordenada de la posición?*

Resolución del problema

En este problema, tenemos como datos la fuerza resultante en la dirección $\breve{x}$ (es la responsable del movimiento del cuerpo). Sabemos que depende de la coordenada *x* de la siguiente manera :

$$\vec{F} = \frac{-\pi^2}{16} x \, \breve{x}$$

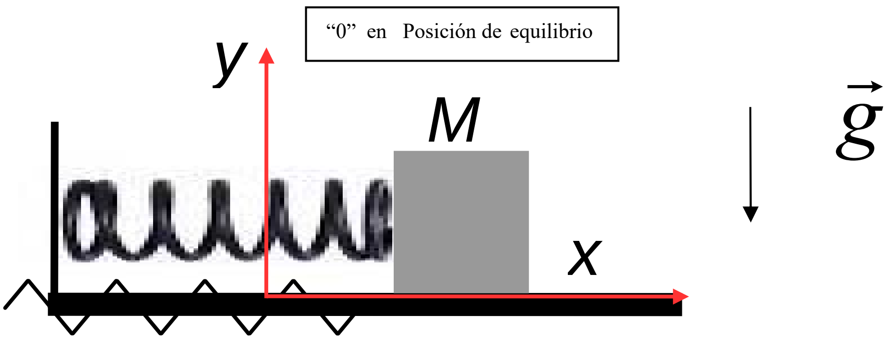
Como la fuerza está expresada en Newton, y la posición x en metros, reescribiendo la expresión para la fuerza con las unidades adecuadas, queda:

$$\vec{F} = \frac{-\pi^2}{16} \frac{N}{m} x \, \hat{x}$$

Como lo que multiplica a la coordenada x es una constante, podemos escribirla en forma más compacta como

$\vec{F} = -k \, x \, \hat{x}$ (1) con $k = \frac{\pi^2}{16} \frac{N}{m}$ (2) , una constante positiva

Este tipo de fuerza es igual a la fuerza que produce un resorte de constante k sobre una masa M que se mueve en un tramo horizontal recto sin rozamiento y recibe el nombre de fuerza de restitución, pues es proporcional al desplazamiento respecto al equilibrio.
La existencia de una fuerza con estas características es la condición para que haya movimiento armónico simple.
Es muy importante en física porque la mayoría de las vibraciones cumplen esta condición al menos en forma aproximada.



Elijo un sistema de referencia inercial fijo a Tierra y un sistema de coordenadas cartesianas con origen en la posición de equilibrio del resorte.
Planteando la segunda ley de Newton, y teniendo en cuenta que la fuerza que nos indican es ya la fuerza resultante y al ser movimiento rectilíneo en x, solo tendremos aceleración en ese eje.

$$\sum \vec{F} = M\vec{a}$$

$\vec{F} = M\vec{a}$ reemplazando la fuerza por su expresión compacta (1)

$\hat{x}: -kx = Ma_x$ (3)

Observemos que para *x=0* la fuerza neta será nula, por lo tanto la aceleración es instantáneamente nula. En consecuencia *x=0* corresponde a una posición de equilibrio. La ecuación (3) nos da la aceleración dependiendo de la coordenada *x*. Sin embargo necesitamos saber la aceleración en función del tiempo para poder encontrar el desplazamiento de la posición de equilibrio *x(t)*.

Recurrimos entonces a la ecuación cinemática de la aceleración esto es: $a_x = \dfrac{d^2x}{dt^2}$ para introducir la dependencia del tiempo y podemos reescribir a la ecuación (3)

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{M}x = 0$$

que corresponde a una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden homogénea, del tipo $\dfrac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$ con $\omega^2 = \dfrac{k}{M}$ (4)

y cuya solución general es:

$$x(t) = Asen(\omega\, t + \alpha) \quad (5)$$

Esta ya es la ecuación pedida en a) de posición en función del tiempo *x(t)* o desplazamiento desde la posición de equilibrio que corresponde a *x=0 m*
Este tipo de función recibe el nombre de **función armónica** y tiene como característica que su derivada de primer y segundo orden son continuas.

Nos falta encontrar quiénes son la pulsación (o frecuencia angular) ω, la amplitud A y la fase inicial α para determinar completamente *x(t)* para este caso.

En nuestro caso, entonces usando (4) y datos del enunciado tenemos que:

$$\omega^2 = \frac{k}{M} = \frac{\pi^2 N}{16.4 kg\ m} = \frac{\pi^2 kg\ m}{64 kg\ m\ s^2}$$

$$\omega = \frac{\pi}{8} s^{-1} \quad (6)$$ pulsación o frecuencia angular.

Para hallar A , usamos las condiciones iniciales dadas en el enunciado:

$$x(t = 2s) = Asen(\frac{\pi}{8} s^{-1} 2s + \alpha) = 0 \qquad (7)$$

$$v(t = 4s) = \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=4s} = A\omega \cos(\omega t + \alpha)\big|_{t=4s} = A\frac{\pi}{8} s^{-1} sen(\frac{\pi}{8} s^{-1}\, 4s + \alpha) = 4\frac{m}{s} \qquad (8)$$

La expresión (7) tiene múltiples posibles soluciones matemáticas con tal que:

$(\frac{\pi}{4}+\alpha) = \text{n}\,\pi$ con n un número entero para que la función seno sea 0 en ese instante.

Por lo que $\alpha = \text{n}\,\pi - \frac{\pi}{4}$ (9) serán todas las posibles fases iniciales.

Ahora ¿podemos elegir cualquier n? No, tiene que ser un "n" para el que también se tiene que cumplir la expresión (8).

Reemplazando (9) en (8), se obtiene:

$$\frac{\pi}{8}s^{-1}A\cos(\frac{\pi}{8}s^{-1}4s + \text{n}\,\pi - \frac{\pi}{4}) = 4\frac{m}{s} \longrightarrow A\cos(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}+\text{n}\pi) = \frac{32}{\pi}\frac{m}{s}s$$

$$A\cos(\frac{\pi}{4}+\text{n}\pi) = \frac{32}{\pi}m \longrightarrow A = \frac{32}{\pi}\frac{1}{\cos(\frac{\pi}{4}+\text{n}\pi)}m \quad (10)$$

Para que esta amplitud tenga sentido físico tiene que ser positiva, entonces podemos elegir cualquier número entero que cumpla que $\cos(\frac{\pi}{4}+\text{n}\pi) > 0$. En particular n=0 pues $\cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Reemplazando en (10)

$$A\,\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{32}{\pi}m \longrightarrow A = \frac{32\,.2}{\pi\sqrt{2}}m$$

Quedando la amplitud

$$\boxed{A = \frac{32\sqrt{2}}{\pi}m}$$

Con lo que se responde al inciso b)

Por otro lado, con n=0 en (12), la fase inicial elegida es

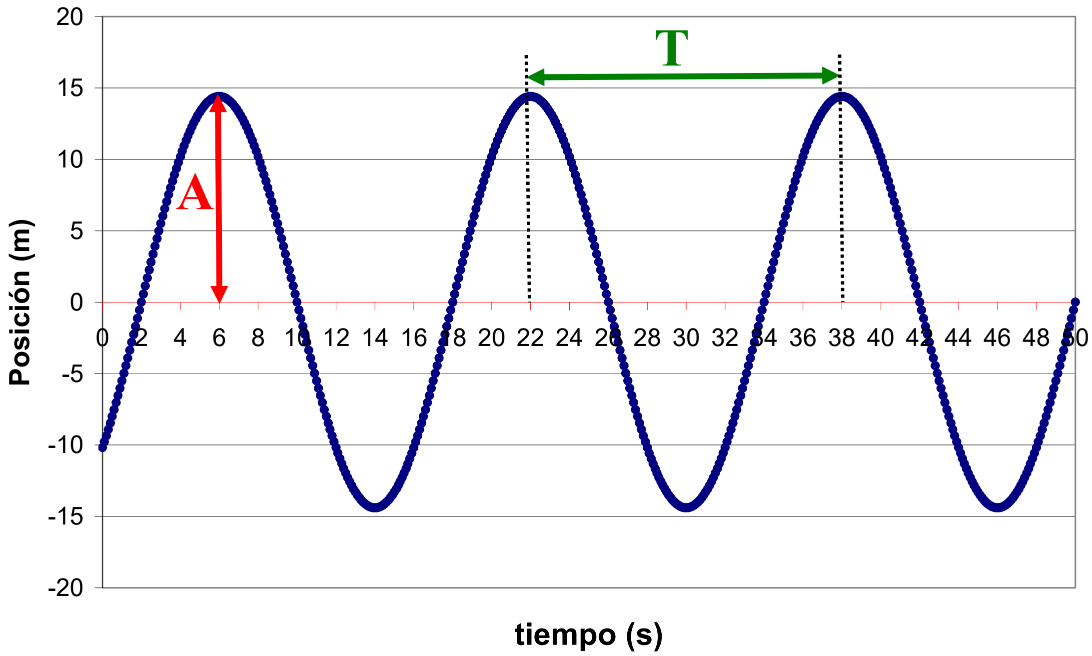
$$\boxed{\alpha = -\frac{\pi}{4}}$$

Con la cual, la ecuación de movimiento (8) queda:

$$\boxed{x(t) = \frac{32\sqrt{2}}{\pi}m\ \ sen(\frac{\pi}{8}t - \frac{\pi}{4})}$$

Con lo que se responde al inciso a)

A fin de recalcar el significado de cada uno de los parámetros, voy a graficar la posición en función del tiempo para los datos de este problema.



A analizar el gráfico, vemos que:

- ✓ la amplitud de la oscilación es de aproximadamente 15m
- ✓ la fase inicial que es negativa y de un cuarto de π, hace que la función considerada tenga un desplazamiento horizontal y hacia la derecha de un cuarto de π, comparándola con una función $seno(\omega t)$. Es un parámetro que pongo para que la función se ajuste a la realidad.
- ✓ el período T de la oscilación es de $16s$ y para determinar la pulsación

$$x(t) = x(t+T)$$
$$A\,seno(\omega t+\alpha) = A seno[\omega(t+T)+\alpha]$$

Para que valga la igualdad anterior

$$\omega T = 2n\pi$$

Lo restrinjo a la primera vez que ocurre $(n = 1)$

$$\Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T}$$

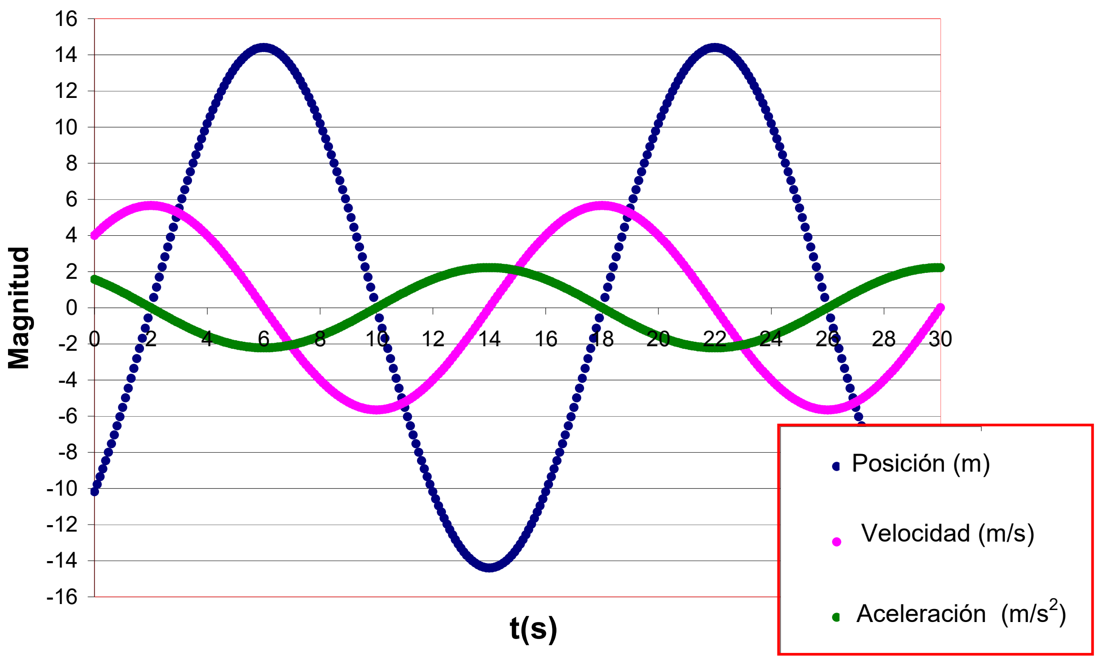
Reemplazando

$$\Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{16} = \frac{\pi}{8}$$

De esta forma analizando el gráfico, recuperamos los parámetros obtenidos anteriormente en forma analítica.

Parte complementaria

a) Al graficar en un mismo gráfico (aunque las unidades del eje vertical no sean las mismas), la posición, la velocidad y la aceleración de la partícula que describe el movimiento oscilatorio armónico simple, se obtiene lo siguiente:



A partir del gráfico anterior, responder:

i) ¿Qué ocurre con la velocidad de la partícula en los instantes de tiempo en el que la posición vale cero? ¿Qué ocurre en esos mismos instantes con la aceleración?

ii) ¿Qué ocurre con la velocidad de la partícula en los entornos de los instantes en los que la posición es máxima? ¿Qué significa que en los mismos instantes en los que la posición es máxima, la aceleración sea mínima?

iii) ídem a la anterior para los instantes en los que posición es mínima.

iv) ¿Cuánto vale la fuerza elástica cuando la coordenada de la posición vale cero? ¿Cuándo es máxima la fuerza elástica?

Respuestas:

i) *En los instantes en los que la posición vale cero, la velocidad (que es la derivada de la posición respecto del tiempo) toma el valor máximo. Justamente por eso, la aceleración (que es la derivada de la velocidad respecto del tiempo) toma valor cero.*

ii) *En los instantes en los que la posición llega a valores máximos, la velocidad (que es la derivada de la posición respecto del tiempo) vale cero y se aprecia que la derivada de esta función tiene pendiente negativa.*

Justamente por eso, la aceleración (que es la derivada de la velocidad respecto del tiempo) es negativa.

iii) *En los instantes en los que la posición llega a valores mínimos, la velocidad (que es la derivada de la posición respecto del tiempo) vale cero y se aprecia que la derivada de esta función tiene pendiente positiva.*
Justamente por eso, la aceleración (que es la derivada de la velocidad respecto del tiempo) es positiva.

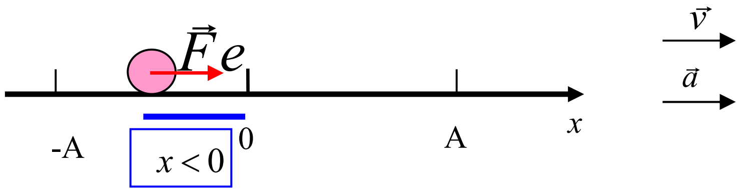
b) Analizar la validez de la le Ley de Hooke $\vec{F} = -k\,x\,\hat{x}$ en todo el rango $-A \leq x \leq A$.

Pensar primero $-A \leq x \leq 0$ y luego $0 < x \leq A$ *¿Qué significa que x sea la coordenada de la posición?*

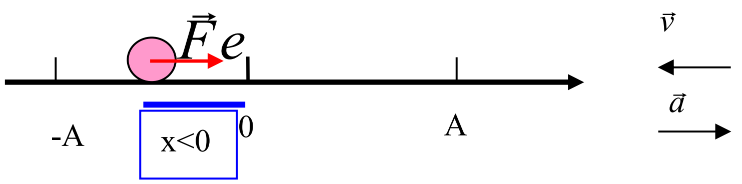
Analicemos las distintas situaciones que pueden presentarse. Tengamos en cuenta que el 0 del sistema coordenado está en la posición de equilibrio del resorte y que la partícula oscila entre los valores de x que van entre A y $-A$, siendo A la amplitud de la oscilación.

De acuerdo a esto, se pueden presentar distintos casos:

Cuando la partícula se encuentra en el tramo $-A \leq x \leq 0$



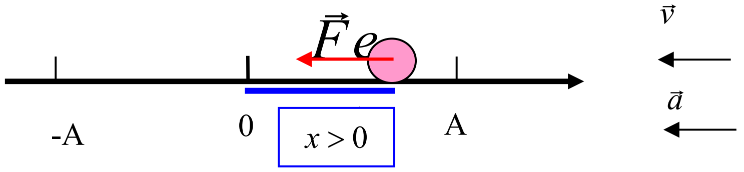
La partícula puede estar acercándose a la posición de equilibrio desde la izquierda. Tiene componentes x de velocidad, aceleración y fuerza elástica positivas y como se aprecia x es negativa.



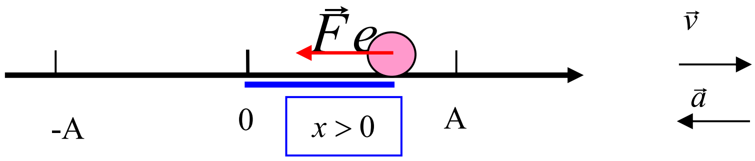
La partícula puede estar alejándose de la posición de equilibrio hacia la izquierda. Tiene velocidad negativa pero la aceleración y la fuerza elástica son positivas y como se aprecia x es negativa.

Efectivamente, para ambos casos $F_e = -kx > 0$ pues $x<0$.

Análogamente, si la partícula se encuentra en el tramo $0< x \leq A$



La partícula puede estar acercándose a la posición de equilibrio desde la derecha. Velocidad, aceleración y fuerza elástica negativas y como se aprecia x es positiva.



La partícula puede estar alejándose de la posición de equilibrio hacia la derecha. Velocidad positiva pero tanto la aceleración como la fuerza elástica son negativas y como se aprecia x es positiva.

Efectivamente, para ambos casos $F_e = -kx < 0$ pues $x>0$.

Es decir, la expresión de la ley de Hooke

$\vec{F} = -k\, x\, \hat{x}$ es válida para todo el rango $-A \leq x \leq A$, siendo x la coordenada de la posición, medida desde la posición de equilibrio. NO sirve si usamos $|x|$.

De esta forma, el análisis de los vectores fuerza elástica, velocidad y aceleración en cada caso nos permiten a partir de lo concreto interpretar la ley de Hooke.